



TITLE:

# 完全交さ孤立特異点の全モノドロミー有限性と交さ型式の正定値性 (解析多様体に関する研究)

AUTHOR(S):

斎藤, 恭司

---

CITATION:

斎藤, 恭司. 完全交さ孤立特異点の全モノドロミー有限性と交さ型式の正定値性 (解析多様体に関する研究). 数理解析研究所講究録 1974, 207: 54-58

ISSUE DATE:

1974-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105169>

RIGHT:

完全交さ (孤立特異点の)  
(全モノドロミーの有限性と交さ型式の正定値性)

東大 教養 有藤恭司

本稿は次の4種の2次元の特異点(これ等を単純楕円型特異点と名付ける)と単純代数群のルート系の研究に現れる拡大されたDynkin図型との関連を述べる。(図)その応用として2次元の完全交さ、normal特異点について、そのvanishing cycleのなすintersection formが正定値となる事、vanishing cycleのなすtotal monodromy groupが有限群となる事、特異点が有理2重点となる事の3者が同値である事を示す。なお実係数の場合には、力学系の問題より、これ等の特異点についてCimolaの研究([1])がある。又、拡大されたDynkin図型と楕円曲線(面)との関連が既に小平[3]にも見い出され、相互に何らかの内的関連があると思われるが、現在の所は分らない。

名前	方程式	c.o.c	r	s	h	$\mu$
$E_6$	$y(y-x)(y-\lambda x)-xz^2=0$	-3	1	1	$\infty$	8
$\tilde{E}_7$	$yx(y-x)(y-\lambda x)-z^2$	-2	1	1	$\infty$	9
$\tilde{E}_8$	$y(y-x^2)(y-\lambda x^2)-z^2$	-1	1	1	$\infty$	10
$(\tilde{D}_4)$	$\begin{cases} y(w-(1+\lambda)y+\lambda x)-z^2=0 \\ y^2-xw=0 \end{cases}$	-4	/	/	/	7

/

容易に、これ等の特異点の *minimal resolution* の *exceptional curve*  $C$  は、非特異な楕円曲線  $C$  となる事が分る。その楕円曲線の絶対不変量  $j = \frac{4}{27} \frac{(1^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$  で与えられ、又 *self-intersection number*  $C \cdot C$  は上記の通り。(上記式に  $\lambda \in \mathbb{C}$  は parameter で  $\lambda \neq 0, 1, \infty$ )

上記の表中  $r, s, h$  はそれぞれ (当面は) *quasi-homogeneous* な超曲面の孤立特異点  $(X, x)$  に対し定義された不変量で、次の様にして与えられる。

$(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  は局所的に  $f=0$  なる方程式で定義されてい、 $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ 、 $D = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  を微分の芽で  $Df=f$  を満たすものとする時、

$$r(X, x) = \dim(D) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0)$$

$$s(X, x) = \max \{ \alpha : \alpha \text{ は } D : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \text{ の固有値} \}$$

$r, s$  は非負の有理数値をとるが、更に Hartshorne の duality を用いて:

$$2r(X, x) + s(X, x) = n$$

が示せる。さてこの時  $h(X, x) = 2/1 - s(X, x) = 2/2r(X, x) - n + 1$

と定義して、 $h(X, x)$  を  $(X, x)$  の *corater 数* と呼ぶ事にする。

さて有理2重点は既に M. Artin, E. Brieskorn (Lipman) 等の研究があるが、ここでその方程式を復習し、上記の量を計算してみると、

	$r$	$s$	$h$	$\mu$
$A_k: x^{k+1} + y^2 + z^2$	$1/(k+1) + 1$	$(k-1)/(k+1)$	$k+1$	$k$
$D_k: x^{k+1} + xy^2 + z^2$	$1/(k+1)2 + 1$	$2(k-2)/2(k-1)$	$2(k-1)$	$k$
$E_6: x^4 + y^3 + z^2$	$1/2 + 1$	$10/12$	$12$	$6$
$E_7: x^3y + y^3 + z^2$	$1/8 + 1$	$16/18$	$18$	$7$

$$E_8: x^5 + y^3 + z^2 \quad 1/30 + 1, \quad 28/30, \quad 30, \quad 8$$

さてここで上に出てきた  $E, \hat{D}, A, D, E$ , 等々の方程式はいずれも、quasi-homogeneous である事に着目しよう。(quasi-homogeneous 性質は intrinsic な特徴づけを持つ、定義等詳細は [4] 参照)

すると次の結果を得る。

定理  $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  の quasi-homog. isolate hypersurface singularity の芽とする時、次の 4 条件は同値

i)  $(X, x)$  の local deformation はすべて又 quasi-homog. となる。

ii)  $0 \leq S(X) \leq 1$

iii)  $r(X) \geq \frac{n-1}{2}$

( $\Leftrightarrow h(X) > 0$ )

iv)  $(X, x)$  は  $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, \hat{E}_6, \hat{E}_7$ , 又は  $\tilde{E}_8$  の方程式に non-degenerate な 2 次型式を加えた方程式で定まる。(例へば  $x^{k+1} + y^2 + z^2 + x_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 = 0$  等)

更に精密には、上記の  $\text{typ. } P$  の特異点  $\text{typ. } Q$  の特異点に deform できる必要充分条件は  $P$  に対応する Dynkin 図型が  $Q$  に対応する Dynkin 図型を含む事である事が示せる。

さて上記の量  $r, s$ , 又は  $h$  の値をみても 予感される事として単純楕円型特異点は 何らかの意味で、有理 2 重点の境界に位置しているのではないかという事が次の Prop. によっても裏づけられる。

Prop. i)  $(X, x)$  を hypersurface 孤立特異点の germ とする。もし  $(X, x)$  が有理 2 重点でないなら、 $(X, x)$  の local deformation には

$\tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ , 又は  $\tilde{E}_8$  のいずれかが現れる。

ii)  $(X, x)$  を 埋め込み次元が 2 以上の完全交差、孤立特異点の芽とすると、 $(X, x)$  の local deformation に 次の  $(\tilde{D}_4)$  が現れる。

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_m^2 = 0 \\ ax_1^2 + \dots + ax_m x_m^2 = 0 \end{cases} \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j)$$

さて  $(X, x)$  を方程式系  $f_1 = \dots = f_r = 0$  によって与えられた完全交差孤立特異点とすると  $f_1 = \varepsilon_1, \dots, f_r = \varepsilon_r$  は、適当に小さく定数  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  をとれば smooth でその丁度中間次元の所に homology を持ち、intersection form が定まる。又方程式  $f_1, \dots, f_r$  を deform し、定数  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  を動かす事により、その homology の monodromy が現れるが、方程式の versal deformation と定数  $\varepsilon$  を可能な限り動かして得る monodromy の全体を全モノドロミー群と呼ぶ事にする。

すると、単純楕円型特異点については、intersection form は固有値 0 を持ち、定値とはならず、又全モノドロミー群が無限群となる。

1 次有理 2 重点について、intersection form は Cartan-Hilling form と一致し、全モノドロミー群 Weyl 群と同型になる事が Brieskorn ([2]) により知られている。従って上記の Prop とあわせる事により次の結果が分る。(この結果は部分的には Lamotke によっても知られていた。)

定理  $(X, x)$  を偶数次元の完全交差孤立特異点の芽とする。

以下の3条件は互に同値である。

- i)  $(X, x)$  の vanishing cycle の intersection form は 定値と与る。
- ii)  $(X, x)$  の total monodromy group は 有限 群と与る。
- iii)  $(X, x)$  は 有理2重点 の方程式に非退化2次型式を加えて得られる方程式で定義された, hypersurface isol. singularityである。

[1] V.I. Arnold: Remark on the method of stable phase . . . ,  
Uspekhi Mat. Nauk. XXVIII, 5 (1973) p 17-45.

[2] E. Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups,  
Proc. of the Int'l Cong. of Math., Nice, 1970.

[3] K. Kodaira: On compact analytic surface II, Ann. of Math.  
77(3) (1963) 563-626.

[4] K. Saito: Einfach Elliptische Singularitäten, Göttingen 1973.